証明可能性の構造的理解に向けて

圏論的アプローチ

池田 侑登（東京大学大学院数理科学研究科）

2025/10/17

数学基礎論若手の会 2025 @ 群馬県前橋市，国立赤城青少年交流の家

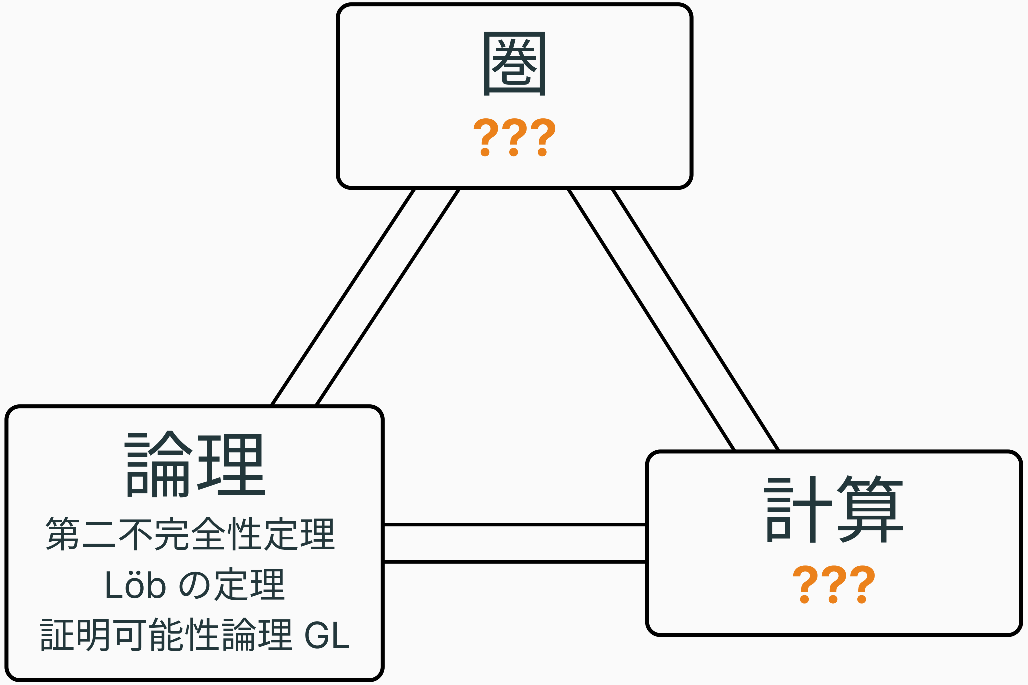
研究目標

(目標)

- 証明可能性に対する Curry–Howard–Lambek 対応の確立.
- 第二不完全性定理 (G2) の鍵である, **理論を理論内部で記述する**構造まで含めた対応を作る.

(期待)

- 第二不完全性定理の理解の深化.
- ロジックと CS の知見の融合.



目次

1. Joyal の G2 の圏論的解釈

第二不完全性定理の内包性

第二不完全性定理 (G2) の成否は，以下に繊細に依存する (Cheng 2021)．

- 証明可能性述語の選択，
- 無矛盾性を表現する論理式の選択，
- Gödel 数による符号化の選択，
- etc.

Cheng (2021) はこれを G2 の **内包性 (intensionality)** と呼ぶ．

$\longrightarrow$ G2 のうち，表現の選択に依存しない議論の「核」を分離したい．

圏論的論理学の基本定律：理論と圏の対応

$$\begin{tikzcd}
\text{理論} \arrow[rr, bend left, "\text{構文的圏 (syntactic category)}"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \text{圏} \arrow[ll, bend left, "\text{内部言語 (internal language)}"]
\end{tikzcd}$$

（型理論，論理）

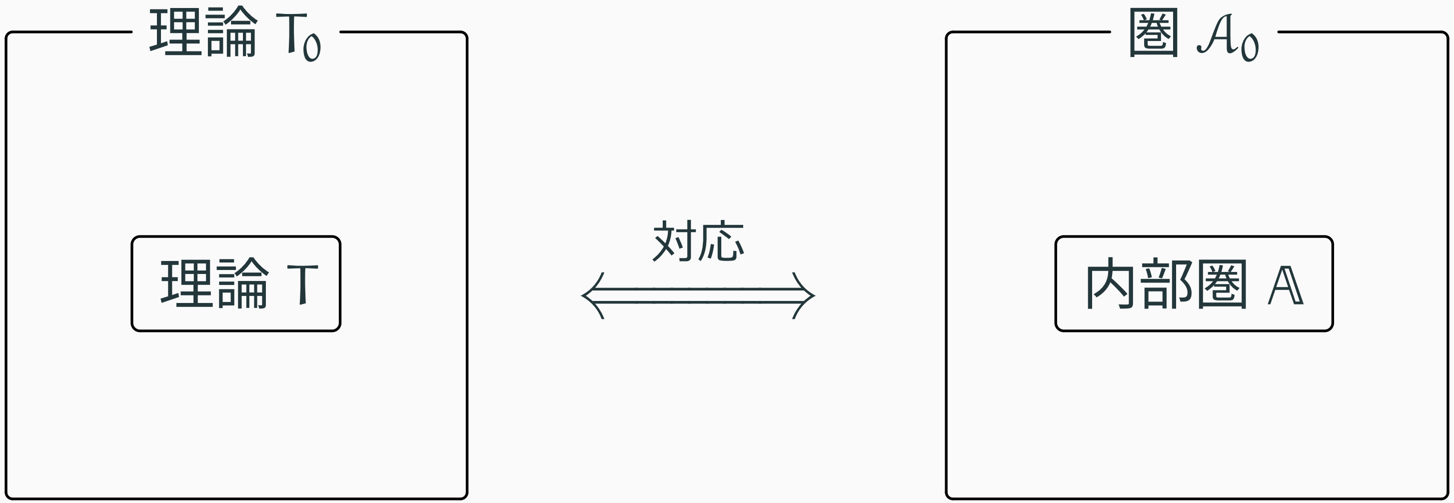
- 内部言語は，圏を調べるのに有用な形式言語を提供する．
- 構文的圏は，記号や公理の表現の選択に依存しない，理論そのものに内在的な構造を抽出できる (Lawvere 1963)．

$\longrightarrow$ G2 を圏論的に解釈し，表現の選択に依存しない構造を抽出できないか？

Joyal による G2 の圏論的解釈

1973 年，Joyal は G2 の特別な場合の圏論的証明を発表（未出版）.

本節の内容は van Dijk & Gietelink Oldenziel (2020) に基づく． Joyal (2005) も参照.



- 「理論内部における理論の記述」が **内部圏** に対応.
- 必要な内部圏が作れる圏として **算術的宇宙 (arithmetic universe)** を導入.
- 証明可能性や G2 の圏論的対応物を構成.

内部圏

引き戻しを持つ圏 $\mathcal{B}$ について，$\mathcal{B}$ の内部圏 (internal category) の概念がある．
$\mathcal{B}$ の内部言語で見ると通常の圏となるようなもの．

例 集合の圏 $\mathbf{Set}$ の内部圏とは小圏のことである．

定義（外面化） 圏 $\mathcal{B}$ が終対象 1 を持つとする．このとき，$\mathcal{B}$ の大域切断関手 $\Gamma_{\mathcal{B}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(1, -) : \mathcal{B} \to \mathbf{Set}$ は，$\mathcal{B}$ の内部圏 $\mathbb{C}$ を小圏に移す．こうして得られる圏を $\mathrm{Ext}(\mathbb{C})$ と書き，$\mathbb{C}$ の外面化 (externalization) という．

通常の圏論と同じ理論が，内部圏でもある程度展開できる．たとえば，

- 内部圏 $\mathbb{C}$ における極限・余極限．
- 内部圏 $\mathbb{C}$ が終対象を持つとき，$\mathbb{C}$ の大域切断関手 $\Gamma_{\mathbb{C}} : \mathrm{Ext}(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$.

算術的宇宙

算術的宇宙はのちに次のように公理化された (Morrison 1996), (Maietti 2010).

定義（算術的宇宙） 算術的宇宙 (arithmetic universe) は，パラメータ付きリスト対象 (parameterized list object) をもつ前トポス (pretopos) のこと.

算術的宇宙のうち始 (initial) なものを $\mathcal{A}_0$ と書く.

- $\mathcal{A}_0$ の内部言語で，構文的圏の構成ができる.
  - $\mathcal{A}_0$ の内部から見て算術的宇宙になっている内部圏 $\mathbb{A}$ が構成できる.
- $\mathcal{A}_0$ は **冪対象を持たない**．特に内部言語は $\to, \neg, \forall$ を持たない.

証明可能性の解釈

$\mathcal{A}_0$ の内部から見て算術的宇宙になっている内部圏 $\mathbb{A}$ をひとつ固定する．

命題 $\mathrm{Ext}(\mathbb{A})$ は算術的宇宙である．

定義 算術的宇宙の構造を保存する一意な関手 $\ulcorner - \urcorner : \mathcal{A}_0 \to \mathrm{Ext}(\mathbb{A})$ を取る．このとき，$\mathcal{A}_0$ 上の自己関手 $\Box$ を $\Gamma_{\mathbb{A}} \circ \ulcorner - \urcorner$ で定める．

$\ulcorner - \urcorner : \mathcal{A}_0 \to \mathrm{Ext}(\mathbb{A})$	Gödel 数 $\varphi \mapsto \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}$
$\Gamma_{\mathbb{A}} : \mathrm{Ext}(\mathbb{A}) \to \mathcal{A}_0$	証明可能性述語 $\mathrm{Pr}(x)$
$\Box = \Gamma_{\mathbb{A}} \circ \ulcorner - \urcorner : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$	証明可能性の様相 $\Box\varphi \equiv \mathrm{Pr}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$

補題（Σ_1 完全性） 自然変換 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \Rightarrow \Box$ が自然に構成できる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0}"] \arrow[dr, "\ulcorner\_\urcorner"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{A}_0 \\
& \mathrm{Ext}(\mathbb{A}) \arrow[ur, "\Gamma_{\mathbb{A}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{A}_0$ が冪対象を持たないことが本質的．論理的には，$\mathcal{A}_0$ の内部言語が $\forall$ を持たない．圏論的には，コンマ圏の射影 $\left(\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \downarrow \Gamma_{\mathbb{A}}\right) \to \mathcal{A}_0$ が冪を保存しない．

定理（G2 の圏論的類似，Joyal） $\mathcal{A}_0$ の始対象 $\bot$ について，$\Box\bot \not\cong \bot$.

2. Ramesh の内省的理論

内省的理論

Ramesh (2023) は，Joyal の枠組みを大きく一般化した構造を提案した．

定義 (Ramesh) 内省的理論 (introspective theory) は次のデータからなる．

- 有限極限を持つ圏 $\mathcal{B}$,
- $\mathcal{B}$ の内部圏 $\mathbb{C}$ であって，内部圏の意味で有限極限を持つもの，
- 有限極限を保存する関手 $S : \mathcal{B} \to \mathrm{Ext}(\mathbb{C})$,
- 自然変換 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \Gamma_{\mathbb{C}} \circ S \ (=: \Box)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0}"] \arrow[dr, "\ulcorner - \urcorner"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{A}_0 \\
& \mathrm{Ext}(\mathbb{A}) \arrow[ur, "\Gamma_{\mathbb{A}}"'] &
\end{tikzcd}
\xrightarrow{\text{一般化}}
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "S"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{B} \\
& \mathrm{Ext}(\mathbb{C}) \arrow[ur, "\Gamma_{\mathbb{C}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

内省的理論の Löb の定理

内省的理論を単に $\langle \mathcal{B}, \mathbb{C} \rangle$ で表す． $\square = \Gamma_{\mathbb{C}} \circ S$ について以下が成立．

定理（内省的理論の Löb の定理，Ramesh） $\langle \mathcal{B}, \mathbb{C} \rangle$ を内省的理論とする．
$\mathcal{B}$ の終対象 1 について，唯一の射 $! : \square 1 \to 1$ は始 $\square$-代数である．

$$
\begin{tikzcd}
\square 1 \arrow[r, "!"] \arrow[d, dashed, "\square f"'] & 1 \arrow[d, dashed, "f"] \\
\square P \arrow[r, "\forall"] & P
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\frac{\square P \vdash P}{\vdash P} \right)
$$

- $P = \bot$ とおくと G2 に対応．
- 従来の算術的宇宙の証明では，自然数対象による論理式の数え上げを使う．Ramesh は自然数対象の使用を回避した．

内省的理論の例 1

例（算術的宇宙） $\langle \mathcal{A}_0, \mathbb{A} \rangle$ は内省的理論の構造をもつ．

例（算術の理論） T を Peano 算術 PA を含む一階の算術の理論とする．
PA から構文的に圏 $\mathcal{B}_{\mathrm{PA}}$ を作り，T から構文的に $\mathcal{B}_{\mathrm{PA}}$ の内部圏 $\mathbb{C}_{\mathrm{T}}$ を作って，
内省的理論 $\langle \mathcal{B}_{\mathrm{PA}}, \mathbb{C}_{\mathrm{T}} \rangle$ が構成できる．

内省的理論の例 2：Kripke フレーム

例 P を整礎な半順序集合とする．このとき，P 上の前層圏 $\mathrm{PSh}(P)$ について，ある充満部分圏 $\mathrm{PSh}_\kappa(P) \subseteq \mathrm{PSh}(P)$ とその内部圏 $\mathrm{PSh}_\kappa\big(|P|_{<\bullet}\big)$ がとれて，内省的理論 $\langle \mathrm{PSh}_\kappa(P), \mathrm{PSh}_\kappa\big(|P|_{<\bullet}\big)\rangle$ が作れる．

$X \in \mathrm{PSh}_\kappa(P)$ について $\Box X$ を計算すると，

$$\Box X\,(p) = \prod_{q<p} X(q).$$

- Kripke 意味論における，P の逆順序上での $\Box$ の解釈と一致．
- 証明可能性論理 GL のフレームと，P の整礎性の仮定が対応．
  - Kripke フレーム $\langle W, R\rangle$ が GL のモデル $\iff$ R は推移的かつ逆整礎．

内省的理論のこれから

内省的理論の枠組みはまだ提唱されて間もなく，様々な研究課題がある．

問題 自然数対象を使わない Löb の定理の証明を，通常の論理学の言葉で解釈するとどうなるか？

問題 ロジックや CS 以外の分野であらわれる内省的理論の例はあるか？

3. Kavvos の双文脈計算 DGL

双文脈計算 DGL

証明可能性論理 GL に対する Curry–Howard–Lambek 対応として，
Kavvos は双文脈計算 (dual-context calculi) DGL を提案した (Kavvos 2020a)．

- 型付き λ 計算に型構成子 $\Box$ を追加．
- 公理 GL に対応する $\mathbb{Y}_A : \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ が作れる．

DGL の計算的側面：

- Church–Rosser 性，強正規化性．
- $\mathbb{Y}_A$ を内包的 (intensional) 不動点コンビネータと見れる (Kavvos 2020b)．
  - $\Box A$ を「型 A を持つプログラムのコードの型」と読む．
  - 自身のコードを参照する再帰的なプログラムの構成．

DGL の圏論的モデルとして次が提案されている (Kavvos 2020a)．

定義 Gödel-Löb 圏 (Gödel-Löb category) は次のデータからなる．

- デカルト閉圏 $\mathcal{C}$,
- 有限直積を保つ自己関手 $\Box : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$,
- 自然変換 $\delta : \Box \Rightarrow \Box \circ \Box$ であって $(\delta\Box) \circ \delta = (\Box\delta) \circ \delta$ を満たすもの,
- 各 $A \in C$ について $Y_A : \Box\left(A^{\Box A}\right) \to \Box A$ は次を可換にする射．

$$\begin{tikzcd}
\Box\left(A^{\Box A}\right) \arrow[r, "\langle \mathrm{id}, \Box Y_A \circ \delta_{A^{\Box A}} \rangle"] \arrow[d, "Y_A"'] & \Box\left(A^{\Box A}\right) \times \Box\Box A \cong \Box\left(A^{\Box A} \times \Box A\right) \arrow[dl, "\Box(\mathrm{ev})"] \\
\Box A &
\end{tikzcd}$$

内省的理論と Gödel-Löb 圏

Gödel-Löb 圏は，Löb の定理に対応する $Y_{\mathbb{A}}$ の存在を公理的に要請している．

Ramesh の内省的理論は，内部圏を用いて，G2 の「理論内部で理論を記述する」構造まで含めて反映している点で優れている．

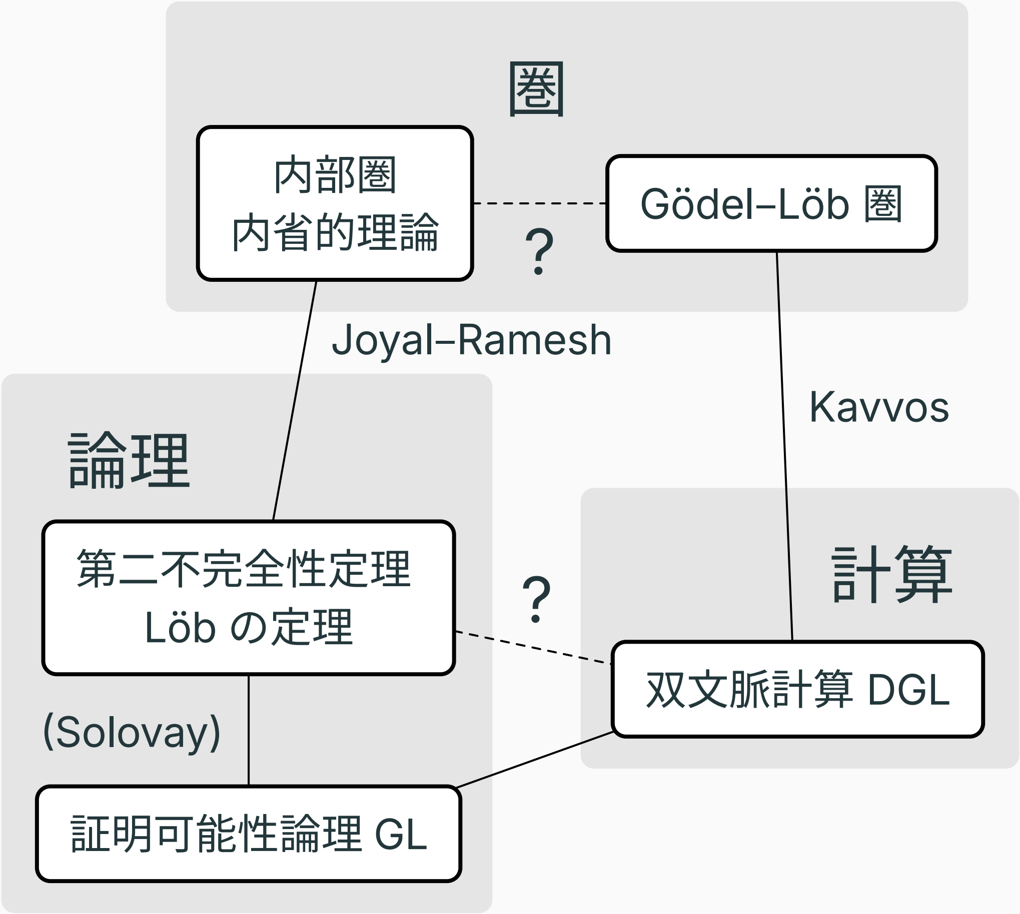
問題 内省的理論 $\langle \mathcal{B}, \mathbb{C} \rangle$ から Gödel-Löb 圏 $\langle \mathcal{C}, \Box \rangle$ を作れるか？

注．$\mathcal{B}$ は典型的には冪を持たない．

4. まとめと展望

まとめと展望

- Joyal や Ramesh の枠組みは，不完全性定理で重要な「理論の理論内部での記述」を内部圏を用いて捉えた．
- Kavvos は GL の CHL 対応を確立し，証明可能性論理に計算的な意味付けを与えた．
- 圏を通して両者を接続し，ロジックや不完全性定理に特有の構造と，計算的な構造をつなげたい．
- この対応は，不完全性定理の更なる理解にも資すると期待される．



参考文献

Cheng, Yong. 2021. “Current Research on Gödel's Incompleteness Theorems”. *The Bulletin of Symbolic Logic* 27 (2): 113–67. `https://doi.org/10.1017/bsl.2020.44`.

Dijk, Joost van, and Alexander Gietelink Oldenziel. 2020. “Gödel Incompleteness Through Arithmetic Universes After A. Joyal”. arXiv. April 22, 2020. `https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.10482`.

Joyal, André. 2005. “The Gödel Incompleteness Theorem, A Categorical Approach”. *Cahiers De Topologie Et Géométrie Différentielle Catégoriques* 46 (3): 202. `http://www.numdam.org/item/CTGDC_2005__46_3_163_0/`.

Kavvos, G. A. 2020a. “Dual-Context Calculi for Modal Logic”. *Logical Methods in Computer Science*, August, 4740. `https://doi.org/10.23638/LMCS-16(3:10)2020`.

Kavvos, G. A. 2020b. “Intensionality, Intensional Recursion, And the Gödel-Löb Axiom”. arXiv. June 13, 2020. `https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.01288`.

Lawvere, F. William. 1963. “Functorial Semantics of Algebraic Theories”. Ph.D. dissertation, Columbia University.

Maietti, Maria Emillia. 2010. “Joyal's Arithmetic Universe as List-Arithmetic Pretopos”. *Theory and Applications of Categories* 24. `https://doi.org/10.70930/tac/qee78enb`.

Morrison, Alan. 1996. “Reasoning in Arithmetic Universe”. MSc dissertation, University of London.

Ramesh, Sridhar. 2023. “Introspective Theories and Geminal Categories”. Ph.D. dissertation, UC Berkeley. `https://escholarship.org/uc/item/3mn0c475`.

補遺

内部圏

定義（内部圏） 引き戻しを持つ圏 $\mathcal{B}$ の内部圏 (internal category) $\mathbb{C}$ とは，$\mathcal{B}$ の対象 $\mathbb{C}_{\mathrm{ob}}, \mathbb{C}_{\mathrm{mor}}$ と，$\mathcal{B}$ の射

- $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : \mathbb{C}_{\mathrm{mor}} \to \mathbb{C}_{\mathrm{ob}}$,
- $\mathrm{i} : \mathbb{C}_{\mathrm{ob}} \to \mathbb{C}_{\mathrm{mor}}$,
- $\mathrm{c} : \mathbb{C}_{\mathrm{mor}} \times_{\mathbb{C}_{\mathrm{ob}}} \mathbb{C}_{\mathrm{mor}} \to \mathbb{C}_{\mathrm{mor}}$.

からなり，通常の圏の公理に対応する可換図式をすべて満たすものである．

（図式の例）

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{\mathrm{ob}} \arrow[r, "\mathrm{i}"] \arrow[d, "\mathrm{i}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}" description] & \mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \arrow[d, "\mathrm{dom}"] \\
\mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \arrow[r, "\mathrm{cod}"] & \mathbb{D}_{\mathrm{ob}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \arrow[r, "\langle \mathrm{id}, \mathrm{i} \circ \mathrm{dom} \rangle"] \arrow[d, "\langle \mathrm{i} \circ \mathrm{cod}, \mathrm{id} \rangle" description] \arrow[dr, "\mathrm{id}" description] & \mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \times_{\mathbb{D}_{\mathrm{ob}}} \mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \arrow[d, "\mathrm{c}"] \\
\mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \times_{\mathbb{D}_{\mathrm{ob}}} \mathbb{D}_{\mathrm{mor}} \arrow[r, "\mathrm{c}"] & \mathbb{D}_{\mathrm{mor}}
\end{tikzcd}$$

Σ_1 完全性と Freyd 被覆

補題 $\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ と $\Gamma_{\mathbb{A}} : \mathrm{Ext}(\mathbb{A}) \to \mathcal{A}_0$ から作られるコンマ圏 $\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \downarrow \Gamma_{\mathbb{A}}$ を考える（内部圏 $\mathbb{A}$ の Freyd 被覆）．このとき射影 $\pi_0 : \left(\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \downarrow \Gamma_{\mathbb{A}}\right) \to \mathcal{A}_0$, $\pi_1 : \left(\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \downarrow \Gamma_{\mathbb{A}}\right) \to \mathrm{Ext}(\mathbb{A})$ はともに算術的宇宙の構造を保存する．

π_0 が冪を保たないため，$\mathcal{A}_0$ が冪対象を持たないことが本質的である．

この補題から，自然変換 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \Rightarrow \square$ が以下で定まる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[r, dashed, "\text{構造保存関手}"] \arrow[dr, dashed, "\ulcorner\_\urcorner"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "/\!/"] & \left(\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0} \downarrow \Gamma_{\mathbb{A}}\right) \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & \mathcal{A}_0 \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0}"] \\
& \mathrm{Ext}(\mathbb{A}) \arrow[r, "\Gamma_{\mathbb{A}}"'] & \mathcal{A}_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}_0}"] \arrow[dr, "\ulcorner\_\urcorner"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5, "\Downarrow\eta"] & & \mathcal{A}_0 \\
& \mathrm{Ext}(\mathbb{A}) \arrow[ur, "\Gamma_{\mathbb{A}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

内省的理論の例：ω 上の前層圏

自然数を順序集合とみたものを ω と書く．前層圏 $\mathrm{PSh}(\omega)$ の内部圏は，ω 上の小圏の前層 $\omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ と等価．そこで

$$\mathrm{PSh}(\omega_{<\bullet}) : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat},\ n \mapsto \mathrm{PSh}(\omega_{<n})$$

を $\mathrm{PSh}(\omega)$ の内部圏とみなしたい．しかし $\mathrm{PSh}(\omega_{<n})$ は小圏にならない．

そこでサイズの制限を導入する．基数の列 $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ を次のように再帰的に取る：

各 $m < n$ について κ_m が定まっているとする．充満部分圏 $\mathrm{PSh}_\kappa(\omega_{<n}) \subseteq \mathrm{PSh}(\omega_{<n})$ を，$X \in \mathrm{PSh}_\kappa(\omega_{<n}) :\Longleftrightarrow \forall m < n, X(m) \in \kappa_m$ で定める．$\mathrm{PSh}_\kappa(\omega_{<n})$ は小圏なので，そのサイズが κ_n に収まるように κ_n を取る．

充満部分圏 $\mathrm{PSh}_\kappa(\omega) \subseteq \mathrm{PSh}(\omega)$ を $X \in \mathrm{PSh}_\kappa(\omega) :\Longleftrightarrow \forall n \in \omega, X(n) \in \kappa_n$ で定める．このとき $\mathrm{PSh}_\kappa(\omega_{<\bullet}) : \omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ は $\mathrm{PSh}_\kappa(\omega)$ の内部圏とみなせる．

内省的理論の例：ω 上の前層圏

例 $\langle \mathrm{PSh}_\kappa(\omega), \mathrm{PSh}_\kappa(\omega_{<\bullet}) \rangle$ は内省的理論の構造をもつ.

$X \in \mathrm{PSh}_\kappa(\omega)$ について $\square X$ を計算すると

$$\square X(0) = \{*\}, \quad \square X(n+1) = X(n)$$

となっている.

これはガード付き再帰 (guarded recursion) の $\mathrm{PSh}(\omega)$ を用いたトポス的意味論におけるガード $\blacktriangleright$ の解釈と一致する．ガード付き再帰の理論では Löb 帰納法と呼ばれるスキーマ $(\blacktriangleright A \to A) \to A$ が知られている.